

Н. Р. ПОПОВ, канд. тех. наук, доц. НТУ «ХПИ»

И. Н. ПОПОВ, зав. лаб. ХГАДИ

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ, ИМПУЛЬСНЫХ И ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

В статье рассмотрены вопросы нарушения размерности при определении дискретных сигналов, формул дискретных преобразований Лапласа, Фурье, z-преобразований, а также математических моделей импульсных и цифровых фильтров.

Ключевые слова: математическая модель, непрерывные, импульсные, цифровые фильтры, преобразования Лапласа, Фурье, z-преобразования.

Введение. В непрерывных, импульсных и цифровых автоматических системах управления для их исследования вводятся соответственно понятия непрерывных, импульсных и цифровых фильтров. Безошибочность их математических моделей является гарантией соответствия теоретических и экспериментальных результатов исследования. Правильность размерности полученной математической модели является одной из объективных контрольных показателей её истинности.

В литературе по теории непрерывных систем автоматического управления (САУ) нарушение размерностей является большой редкостью. В литературе по импульсным и цифровым САУ нарушение размерности начинается с записи решетчатых функций и, как следствие этого, при записи дискретных преобразований Лапласа, Фурье, z-преобразования и соответственно дискретных передаточных функций и частотных характеристик.

В этой статье рассмотрим эти вопросы на примере типового (элементарного) фильтра, представляющего собой, например, интегрирующее звено.

Дифференциальное уравнение у идеального интегрирующего звена имеет вид и размерности как у входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов (рис. 1), т. е.

$$T_{\text{и}} \frac{dy(x)}{dt} = x(t), \quad (1)$$

где $T_{\text{и}}$ – постоянная времени интегрирования с размерностью секунда, компенсирующая размерность секунда дифференциала dt ; $dy(t)$ имеет размерность сигнала $y(t)$.

$$\frac{x(t)}{X(p)} \rightarrow \boxed{\frac{k(t)}{K(p)}} \frac{y(t)}{Y(p)}$$

Рис. 1 – Идеальное интегрирующее звено

Весовая функция

$$k(t) = y(t) \Big|_{x(t) = \delta(t) = \frac{1}{T_n} 1(t)} \quad (2)$$

имеет размерность C^{-1} , а передаточная функция $K(p)$, полученная как отношение изображений по Лапласу при нулевых начальных условиях $Y(p)$ к $X(p)$, полученная при применении к уравнению (1) или как преобразование Лапласа к весовой функции (2) будет безразмерной, т.е.

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \int_0^{\infty} k(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{T_n p} \quad (3)$$

поскольку оператор p имеет размерность C^{-1} .

При замене $p = j\omega$, получим из $K(p)$ амплитудно-фазо-частотную характеристику

$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \int_0^{\infty} k(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega T_n} = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (4)$$

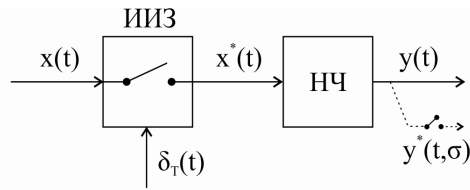
$$K(\omega) = |K(j\omega)| = \frac{1}{\omega T_n}, \quad (5)$$

где (5) – амплитудно-частотная характеристика, также безразмерна за счет статического коэффициента по скорости $1/T_n$;

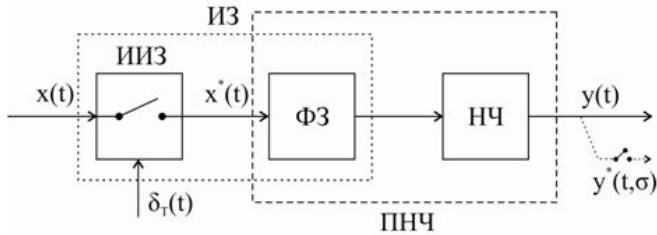
Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Функциональные схемы двух типов импульсных фильтров можно представить в виде последовательного соединения идеального импульсного звена (ИИЗ, δ -ключа) и непрерывной части (НЧ) (рис. 2, а), а также импульсного звена (ИЗ) и НЧ (рис. 2, б). Поскольку импульсное звено можно представить в виде последовательного соединения ИИЗ и формирующего звена (ФЗ), отражающего реальные импульсы на выходе ИЗ, то вторую схему импульсного фильтра можно свести, аналогично первой, к последовательному соединению ИИЗ и приведенной непрерывной части (ПНЧ), которая объединяет ФЗ и НЧ. Хотя выходной сигнал $y(t)$ является непрерывной функцией времени, для получения дискретных математических моделей импульсных фильтров сигнал $y(t)$ рассматривают в дискретные моменты времени $y^*(t, \sigma) = y[nT + \sigma T]$, т. е. к выходу импульсных фильтров подключаются фиктивные идеальные импульсные элементы, с помощью которых можно получать решетчатые функции $y^*(t, \sigma)$ не только в моменты nT , но и смещенные на σT в пределах периода дискретизации T , где $0 \leq \sigma \leq 1$.



а



б

Рис. 2 – Функциональные схемы двух типов импульсных фильтров:
а – последовательное соединение идеального импульсного звена (ИИЗ, δ -ключа) и непрерывной части (НЧ); б – последовательное соединение импульсного звена (ИЗ) и НЧ

На рис. 2 в соответствии с [6,7] $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)T$ и решетчатые функции

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] \delta(t - nT)T \quad (7)$$

$$y^*(t, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} y[nT + \sigma T] \delta(t - nT)T \quad (8)$$

не изменяют свои размерности по сравнению с сигналами $x(t)$, $y(t)$ в отличие от [1÷5], где $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ и тогда

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] \delta(t - nT) \neq x[nT] \quad (9)$$

так как в моменты nT в (9) конечные значения дискретных выборок $x[nT]$ умножаются на бесконечное значение $\delta(t - nT)$, кроме того, в $x^*(t)$ за счет размерности дельта-функции изменяется размерность в C^{-1} по сравнению с размерностью $x(t)$. Заметим также, что в выражении (7) $\lim_{T \rightarrow 0} x^*(t)$, в отличие от (9), стремится к исходному непрерывному сигналу $x(t)$, т. е.

$$\lim_{T \rightarrow 0} x^*(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] \delta(t - nT)T = \int_0^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t), \quad (10)$$

Что отвечает условиям билинейности преобразований, а, следовательно, подтверждает истинность (7).

Применение преобразований Лапласа и Фурье к дискретному сигналу в виде (7) дают формулы соответственно дискретных преобразований Лапласа и Фурье в [6,7]

$$\begin{aligned} X^*(p) &= \int_0^{\infty} x^*(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] \delta(t - nT) T e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] T \int_0^{\infty} \delta(t - nT) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] e^{-pnT} T = X(e^{pT}), \quad (11) \end{aligned}$$

Аналогично

$$X^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] e^{-j\omega nT} T = X(e^{j\omega T}) \quad (12)$$

Как известно, для исключения периодичности дискретных преобразований Лапласа и Фурье, вводится z-преобразование при замене $e^{pT} = e^{j\omega T} = z$, т. е. (11,12) преобразуются в формулу однозначного z-преобразования

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] z^{-nT} \quad (13)$$

Из (11), (12), (13) видно, что дискретные изображения отличаются по размерности от дискретных оригиналов в секунду за счет T , как и в непрерывных фильтрах за счет dt .

Применение преобразований Лапласа, Фурье, z-преобразования к дискретному сигналу (9) [1÷5] дают формулы:

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] e^{-pnT} \quad (14)$$

$$X^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] e^{-j\omega nT} \quad (15)$$

$$X^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] z^{-n} \quad (16)$$

в которых дискретные изображения имеют ту же размерность, что и дискретные оригиналы (сигналы).

Правильность формул (11), (12), (13) и их билинейность можно показать также из формул преобразования Лапласа, Фурье для непрерывных сигналов при переходе к дискретным сигналам, учитывая, что при квантовании непрерывного времени t на nT , т. е. при замене $t = nT$, от бесконечно малого дифференциала dt переходят к конечному интервалу T и от непрерывного интеграла к сумме, т. е., например:

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt \doteq \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] e^{-pnT} T = X^*(p) \quad (17)$$

или

$$\lim_{T \rightarrow 0} X^*(p) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] e^{-pnT} T = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt = X(p). \quad (18)$$

Рассмотрим отличие математических моделей импульсных фильтров, например, в [1÷5] от тех, которые предлагаются нами на основе дискретных преобразований Лапласа, Фурье, z-преобразования в [6,7] на примере интегрирующего звена в НЧ, представленного выражениями (1) и (2). Для однозначного сравнения с цифровым фильтром, берем $\sigma = 0$. В соответствии с [1÷5] и формул (14÷16) дискретные передаточные функции и частотные характеристики для импульсного фильтра на рис. 2,а имеют вид:

$$K_{НЧ}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{НЧ}[nT] z^{-n} = \frac{1}{T_H} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{T_H} \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (19)$$

$$K_{НЧ}(e^{j\omega T}) = \hat{K}_{НЧ}(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{НЧ}[nT] e^{j\omega nT} = \frac{1}{z T_H \sin \frac{\omega T}{2}} e^{j(-\frac{\pi}{2} + \frac{\omega T}{2})}, \quad (20)$$

$$K_{НЧ}(j\lambda) = \frac{1}{T_H} \frac{1+j\frac{T_H\lambda}{2}}{j\lambda} \quad (21)$$

где $K_{НЧ}[nT] = \frac{1}{T_H} 1[nT]$, которая получается из (2) при замене $t = nT$;

λ – размерная $[C^{-1}]$ псевдочастота.

В соответствии же с [6,7] и формул (11÷13) дискретные передаточные функции и частотные характеристики выглядят следующим образом:

$$K_{НЧ}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{НЧ}[nT] z^{-n} T = \frac{T}{T_H} \frac{z}{z-1} = \frac{T}{T_H} \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (22)$$

$$K_{НЧ}(e^{j\omega T}) = \hat{K}_{НЧ}(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{НЧ}[nT] e^{j\omega nT} T = \frac{T}{z T_H \sin \frac{\omega T}{2}} e^{j(-\frac{\pi}{2} + \frac{\omega T}{2})}, \quad (23)$$

$$K_{НЧ}(j\lambda) = \frac{1}{T_H} \frac{1+j\frac{T_H\lambda}{2}}{j\lambda} \quad (24)$$

В выражениях (22÷24) передаточные функции и амплитудно-частотные характеристики являются безразмерными, в (19÷21) аналогичные характеристики из-за неправильных формул (14÷16) имеют размерность $[C^{-1}]$, что противоречит их сущности, т. е. являются ошибочными.

Рассмотрим математические модели импульсного фильтра на рис. 2,б. Пусть формирующее звено соответствует импульсному звену (ИЗ) с амплитудно-импульсной модуляцией, прямоугольными импульсами длительностью T , статическим коэффициентом, равным единице (экстраполятор нулевого порядка эоп). В [7] показано, что правильная запись передаточной функции $K_{\Phi 3}(p)$ такого звена имеет вид

$$K_{\Phi 3}(p) = (1 - e^{-Tp})(Tp)^{-1} \quad (25)$$

В отличие от [1÷5], где

$$K_{\Phi 3}(p) = (1 - e^{-Tp})p^{-1} \quad (26)$$

Дискретные передаточные функции и частотные характеристики согласно [1÷5] и [6,7] совпадают и соответственно имеют вид:

$$K_{\Pi\Pi\Pi}(z) = TT_n^{-1}(z-1)^{-1} \quad (27)$$

$$K_{\Pi\Pi\Pi}(e^{j\omega T}) = K_{\Pi\Pi\Pi}^*(j\omega) = \frac{T}{zT_n \sin \frac{\omega T}{2}} e^{j(-\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T}{2})} \quad (28)$$

$$K_{\Pi\Pi\Pi}(j\lambda) = \frac{1}{T_n} \frac{1 - j\frac{T_n\lambda}{2}}{j\lambda} \quad (29)$$

Таким образом, дважды допущенные ошибки в [1÷5], а именно: отсутствие в знаменателе $K_{\Phi 3}(p)$ множителя T и отсутствия множителя T в формулах прямых дискретных преобразований Лапласа, Фурье и z -преобразования (14÷16) при применении их к дискретной весовой функции $K_{\Pi\Pi\Pi}[nT]$ – взаимно компенсировалось как и в [6, 7] (11÷13,25) взаимно сократились. В [3, с.19] эти ошибки выдаются за «математическую тонкость», но эта «тонкость» приводит к тому, что нарушена размерность и величина дискретного сигнала $x^*(t)$ в T^{-1} раз, следовательно, предел этой последовательности импульсов при $T \rightarrow 0$ не стремится к исходной непрерывной функции $x(t)$; неверны формулы дискретных преобразований Лапласа, Фурье и z -преобразования, а, следовательно, и дискретные передаточные и частотные функции (19÷21) импульсных фильтров рис.2,а; неверны формулы статических и динамических характеристик формирующих звеньев импульсных звеньев (ИЗ) в импульсных фильтрах рис. 2, б, так как АЧХ ФЗ уменьшается в T раз [1, ф.13.7, рис. 13.2]. Чтобы избежать такого казуса в [9] предлагается «не изменяя общности выводов» принять $T = 1$, а в [10] $T = 1$, с.

Для цифровых фильтров (рис.3) в [4,с.317÷321] приведены три приближенных равенства вычисления цифрового оператора интегрирования ввиду невысоких требований к их точности, но высоких требований к устойчивости программ:

$$\frac{1}{p} \approx \frac{T}{z-1} = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (30)$$

$$\frac{1}{p} \approx \frac{Tz+1}{z-1} = \frac{T(1+z^{-1})}{z-1} \quad (31)$$

$$\frac{1}{p} \approx \frac{Tz}{z-1} = \frac{T}{1-z^{-1}} \quad (32)$$

в которых оператор p получают из известного выражения $z = \exp(pT)$, т.е. $p = \frac{1}{T} \ln z$. В последнем выражении $\ln z$ может быть разложено в ряд тремя способами [8]:

$$p \approx \frac{1}{T} \left[(z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \dots \right] \quad (33)$$

$$p \approx \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right] \quad (34)$$

$$p \approx \frac{1}{T} \left[(1-z^{-1}) + \frac{1}{2}(1-z^{-1})^2 + \frac{1}{3}(1-z^{-1})^3 + \dots \right] \quad (35)$$

$$\frac{x_u[nT]}{X_u(z)} \rightarrow \boxed{K(z)} \frac{y_u[nT]}{Y_u(z)}$$

Рис. 3 – Цифровой фильтр

Так как входной цифровой сигнал $x_u[nT]$ и выходной цифровой сигнал $y_u[nT]$ цифровых интеграторов обычно имеют одинаковую физическую природу, то в [4] признают, что их передаточные функции $K(z)$ должны быть безразмерными и тогда в [4] ошибочно предлагается в формулах (30÷32) исключить «масштабный множитель T », т. е. в этом случае дискретные передаточные функции $K(z)$ и псевдочастотные характеристики $K(j\lambda)$ всех трех разновидностей цифровых интеграторов имеют вид:

$$K(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}; \quad K(j\lambda) = \frac{1-j\lambda T/2}{j\lambda T} \quad (36)$$

$$K(z) = \frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}; \quad K(j\lambda) = \frac{1}{j\lambda T} \quad (37)$$

$$K(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}; \quad K(j\lambda) = \frac{1+j\lambda T/2}{j\lambda T} \quad (38)$$

Из псевдочастотных характеристик (36÷38) следует, что коэффициент передачи цифровых интеграторов равен $1/T$. Изменение его в соответствии с расчетом динамики проектируемой системы управления в [4] рекомендуется осуществлять путем умножения на коэффициент ν увеличения периода дискретности $\nu T = T_n$, тогда частотная характеристика, например в формуле (37), будет иметь вид

$$K(j\lambda) = \frac{1}{j\lambda \nu T} = \frac{1}{j\lambda T_n} \quad (39)$$

где $\nu = T_n / T$ – коэффициент увеличения периода дискретности. Эти «рекомендации» похожи на то, что вначале «исключают», а потом «восстанавливают».

На наш взгляд, правильным является то, что выражения (30÷32) будут передаточными функциями интеграторов в том случае, если левые и правые части операторов интегрирования умножить на статический коэффициент преобразования интегратора, равный $1 / T_n$ (T_n – постоянная времени интегрирования), т. е.:

$$\frac{1}{T_n p} = K(p) \approx \frac{T}{T_n} \frac{1}{z-1} = \frac{T}{T_n} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = K(z); \quad K(j\lambda) = \frac{1-j\lambda T/2}{j\lambda T_n} \quad (40)$$

$$\frac{1}{T_n p} = K(p) \approx \frac{T}{2T_n} \frac{z+1}{z-1} = \frac{T}{2T_n} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = K(z); \quad K(j\lambda) = \frac{1}{j\lambda T_n}; \quad (41)$$

$$\frac{1}{T_n p} = K(p) \approx \frac{T}{T_n} \frac{z}{z-1} = \frac{T}{T_n} \frac{1}{1-z^{-1}} = K(z); \quad K(j\lambda) = \frac{1+j\lambda T/2}{j\lambda T_n}. \quad (42)$$

В этом случае в выражениях (40÷42) дискретные передаточные функции $K(z)$ и частотные характеристики $K(j\lambda)$ цифровых интеграторов являются безразмерными и имеют статический коэффициент передачи, равный $1 / T_n$, как и у непрерывного интегратора.

Выводы. Проведенная сравнительная оценка математических моделей непрерывных, импульсных и цифровых фильтров на примере интегрирующего звена показала, что в литературе, например в [1÷5], по импульсным и цифровым САУ допущены нарушения мер и размерностей решетчатых функций и, как следствие, формул дискретных преобразований Лапласа, Фурье z -преобразований и соответственно дискретных передаточных

функций и частотных характеристик импульсных и цифровых фильтров. Полученные результаты подтверждают адекватность предлагаемых математических моделей и могут быть использованы для исследования импульсных и цифровых САУ.

Список литературы: 1. Теория автоматического управления. Под ред. А. В. Нетушила. – М.: Высш. шк., 1976, 400с. 2. Изерман Р. Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984, 541с. 3. Шамриков Б. М. Основы теории цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1985, 296с. 4. Микропроцессорные системы автоматического управления. Под общ.ред. В. А. Бесекерского. - Л.: Машиностроение, 1988, 365с. 5. Александров Є. Є., Козлов Е. П., Кузнецов Б. І. Теорія автоматичного керування. Т. 1. – Харків, НТУ «ХПІ», 2002, 490с. 6. Попов Н. Р., Попов И. Н. О формулах дискретного преобразования Лапласа, Фурье, z-преобразования и их применение.// Радиотехника. 2000. Вып. 116. с. 28 – 34 7. Попов Н. Р., Попов И. Н. О математических моделях экстраполяторов.// Вестник НТУ «ХПІ», 17: 2004. с. 159 – 168 8. Справочник по специальным функциям. Под ред.. М. Абрамовица и И. Стиган (перевод с англ. под. ред.. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной). М., Наука, 1979г., 832 стр. 9. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. - М., 1971, 288с. 10. Шамриков Б. М. Основы теории цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1985. – 296с.

Поступила в редколлегию 09.12.2012

УДК 62:681.3

Сравнительная оценка математических моделей непрерывных, импульсных и цифровых фильтров / Н. Р.Попов, И. Н.Попов// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Автоматика та приладобудування. – Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – № 8 (982). – С. 88–95. – Бібліогр.: 10 назв.

У статті розглянуті питання порушення розмірності при визначенні дискретних сигналів, формул дискретних перетворень Лапласа, Фур'є, z-перетворень, а також математичних моделей імпульсних і цифрових фільтрів.

Ключові слова: математична модель, безперервні, імпульсні, цифрові фільтри, перетворення Лапласа, Фур'є, z-перетворення.

The article deals with the questions of violations of dimension in defining discrete signals, formulas of discrete Laplace, Fourier, z-transforms, as well as mathematical models of pulse and digital filters.

Keywords: mathematical model, continuous, pulse, digital filters, Laplace, Fourier transforms, z-transform.